

d) Spatially oscillatory potential turned out to be a feature of the strictly collisionless model only. For real plasma diodes solutions with uniform plasma potential are more probable. By rising the collision frequency of the ions the potential minimum in the case of the nonmonotonic potential distributions was reduced so much that it could hardly be noticed. This result is relevant for the theory of the Q-machine. Under normal conditions the assumption of a monotonic potential shape within the emitter sheaths of Q-machines seems to be a fair approximation.

### Acknowledgements

The author is indebted to Priv.-Doz. Dr. E.W. BLAUTH and Dr. G. VON GIERKE for their interest and support. Numerous discussions with Drs. E. GUILINO and W. OTT in the course of this work have been of considerable value in clarifying certain points. The author also wishes to thank Mr. P. PIOTROWSKI and Mrs. H. WILHELM for their help in programming the numerical calculations. The assistance of Mr. J. KONRAD in technical work and during the measurements is acknowledged.

This work was performed as part of the agreement between the Institut für Plasmaphysik GmbH, Munich-Garching, and Euratom to conduct joint research in the field of plasma physics.

## Abschätzung der für die Ionenextraktion wichtigen Parameter der Raumladungsschicht

K. FETTE und J. HESSE

Institut A für Physik der Technischen Universität Braunschweig

(Z. Naturforsch. **25 a**, 518—524 [1970]; eingegangen am 27. September 1969)

Ions extracted from a plasma often have to pass a space charge existing in front of the container wall. If collisions occur within the sheath, both, the ion composition and the extraction efficiency may heavily be influenced.

The parameters of interest are the extension and the field strength of the sheath. A theory is presented by which these quantities can be calculated.

The theory holds for a positive space charge, the orifice being biased negativ with respect to the plasma potential.

Numerical results are given concerning a weakly ionized nitrogen plasma.

In einer früheren Arbeit<sup>1</sup> konnte experimentell gezeigt werden, daß der Prozeß der Ionenextraktion durch die Existenz einer Raumladungsschicht vor der Extraktionssonde modifiziert wird. Es wurden sowohl Auswirkungen der Schicht auf den Ablauf von Ion-Molekül-Reaktionen als auch auf die Richtungsverteilung der austretenden Ionen nachgewiesen.

Ebenso ist bekannt, daß als Folge der Existenz der Raumladungsschicht auch die Transparenz der Extraktionsöffnung beeinflußt wird<sup>2, 3</sup>.

Um die genannten Einflüsse der Raumladungsschicht abschätzen zu können, ist es notwendig, konkrete Vorstellungen über die räumliche Ausdehnung und die elektrische Feldstärke der Schicht zu haben.

Es wurde daher eine einfache Sondentheorie entwickelt, die es gestattet, zu konkreten numerischen Aussagen zu gelangen. Die Theorie gilt für eine

überwiegend positive Raumladungsschicht, in der die Ionenbewegung stoßbestimmt ist.

Wegen der sondentheoretischen Behandlung ist die Rechnung für den in der Praxis häufigen Fall anwendbar, in dem die Extraktionsöffnung in einer ebenen Langmuir-Sonde angebracht ist.

### Die Raumladungsschicht als Plasmabegrenzung

Befindet sich ein quasineutrales Plasma<sup>4</sup> im Kontakt mit einer Wand, und sind Elektronen die dominierenden negativen Ladungsträger, so bildet sich vor der Wand eine positive Raumladung aus. Diese nach LANGMUIR<sup>5</sup> benannte Raumladungsschicht ist die Folge der unterschiedlichen thermischen Geschwindigkeiten der Elektronen und Ionen. Im allgemeinen überwiegt der thermische Wandstrom der

Sonderdruckanforderungen an Priv.-Doz. Dr. H. H. BRÖMER, Institut für Physik, Technische Hochschule Braunschweig, D-3300 Braunschweig, Mendelssohnstr. 1 A.

<sup>1</sup> H. H. BRÖMER u. J. HESSE, Z. Naturforsch. **23 a**, 1960 [1968].

<sup>2</sup> G. HINZPETER, Ann. Phys. (Lpz.) **17**, 343 [1966].

<sup>3</sup> H. H. BRÖMER u. K. FETTE, erscheint demnächst.

<sup>4</sup> M. A. UMAN, Introduction to Plasma Physics, McGraw-Hill, New York 1964.

<sup>5</sup> I. LANGMUIR u. H. M. MOTT-SMITH, Phys. Rev. **28**, 727 [1925].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Elektronen den der Ionen um mehrere Größenordnungen.

Stationäre Verhältnisse erhält man nur dann, wenn die Ströme beiderlei Vorzeichens auf die Wand gleich groß werden. Solange dies noch nicht erreicht ist, lädt sich das Plasma durch den Elektronenverlust positiv gegen die Wand auf. Das entstehende Gegenfeld vermindert die Zahl der Elektronen in Wandnähe, es bildet sich eine positive Raumladungsschicht aus.

Diese Schicht umgibt nicht nur die Wände, sondern auch jede eingeführte Sonde. Isoliert man die Sonde, nimmt sie das gleiche Potential gegen das Plasma an wie eine Wand an dieser Stelle. Wird durch einen äußeren Eingriff das Potential der Sonde relativ zum Plasma geändert, so fließt auf sie ein resultierender Strom.

Bei genügend negativen Sondenspannungen gelangen praktisch nur noch Ionen auf die Sonde. Im Falle einer idealen ebenen Sonde bleibt bei Erhöhung der negativen Sondenspannung der Strom auf die Sonde konstant. Lediglich die Dicke der Raumladungsschicht und die elektrische Feldstärke in ihr nehmen zu. Den Ionenstrom nennt man in diesem Falle Ionensättigungsstrom.

Der Ionensättigungsstrom  $J_s^+$  auf die Sonde ist wegen der Kontinuitätsbedingung gleich dem in eine gleichgroße Fläche der Schichtgrenze einfallenden thermischen Ionenstrom

$$J_s^+ = \frac{1}{4} e_0 n_p \bar{v}_i F_s. \quad (1)$$

Entsprechend ist der Elektronensättigungsstrom (bei positiven Spannungen der Sonde relativ zum Plasma) auf die Sonde

$$J_s^- = \frac{1}{4} e_0 n_p \bar{v}_e F_s. \quad (2)$$

Darin bedeuten:  $e_0$  = Elementarladung,  $n_p$  = Trägerkonzentration beiderlei Vorzeichens im ungestörten Plasma vor der Schicht (siehe Abb. 1),  $F_s$  = Sondenfläche,  $\bar{v}_{i,e}$  = mittlere thermische Geschwindigkeit der Ionen bzw. Elektronen

$$\bar{v}_{i,e} = \left( \frac{8 k T_{i,e}}{\pi \cdot m_{i,e}} \right)^{1/2} \quad (3)$$

mit  $T_{i,e}$  = Temperatur der Ladungsträger,  $m_{i,e}$  = Masse der Ladungsträger.

In der positiven Raumladungsschicht nimmt die Konzentration der Elektronen ab

$$n = n_p \cdot \exp\{-V_s/V_e\}, \quad (4)$$

$$V_e = k T_e / e_0 \quad (5)$$

$V_e$  = Spannungsäquivalent der Elektronentemperatur  $T_e$ ,  $V_s$  = Potential des Plasmas gegen die Sonde.

Der Elektronenstrom gegen das elektrische Feld der Raumladungsschicht wird also

$$J_s^- = \frac{1}{4} e_0 n_p \cdot \exp\{-V_s/V_e\} \bar{v}_e F_s. \quad (6)$$

Das Potential des Plasmas gegen eine isolierte Sonde bzw. gegen die Wand,  $V_{st}$ , erhält man aus der Forderung, daß der resultierende Strom auf die Sonde verschwindet

$$J_s^+ - J_s^- = 0.$$

Damit wird

$$V_{st} = \frac{1}{2} V_e \left( \ln \frac{m_i}{m_e} + \ln \frac{V_e}{V_i} \right). \quad (7)$$

Die Beziehung (7) behält ihre Gültigkeit auch dann, wenn die Ionenbewegung in der Schicht stoßbestimmt ist. Dies folgt aus der Tatsache, daß (4) weiterhin gilt und daß bei einer idealen ebenen Sonde die Kontinuitätsgleichung die besonders einfache Form annimmt, die die Gleichheit der Stromdichten auf jede zur Sonde parallele Fläche fordert. Dagegen gehorcht die Ionenbewegung selbst anderen Gesetzmäßigkeiten, die im folgenden behandelt werden.

### Die stoßbestimmte Raumladungsschicht

Folgen die Ionen dem Schichtfeld nicht freifallend, wie in der Langmuir-Theorie, sondern driften sie unter häufigen Zusammenstößen mit den neutralen Molekülen durch die Schicht, so modifiziert sich die Gl. (1) zu einer analogen Beziehung für die Ionenstromdichte

$$I_s^+ = e_0 n \cdot v_d \quad (8)$$

Die Driftgeschwindigkeit  $v_d$  der Ionen ist das Produkt aus Ionenbeweglichkeit  $\mu$  und der elektrischen Feldstärke  $E$

$$v_d = \mu \cdot E. \quad (9)$$

Dabei können je nach Feldstärke zwei Extremfälle unterschieden werden<sup>6-8</sup>:

1. Die im Feld aufgenommene Energie der Ionen ist klein gegen ihre thermische Energie  $\mathcal{W}_{kin}$  ( $\lambda$  = mittlere freie Weglänge)

$$e_0 E \lambda \ll \mathcal{W}_{kin}. \quad (10 a)$$

<sup>6</sup> K. T. COMPTON, Phys. Rev. **22**, 333 [1923].

<sup>7</sup> J. DOSSE u. G. MIERDEL, Der elektrische Strom im Hochvakuum und in Gasen, S. Hirzel, Leipzig 1945.

<sup>8</sup> J. HESSE, Dissertation, Technische Universität Braunschweig 1968.

Dann ist die Beweglichkeit von der Feldstärke unabhängig und die Driftgeschwindigkeit der Feldstärke proportional.

2. Bei großen elektrischen Feldern gilt

$$e_0 E \lambda \gg W_{\text{kin}} \quad (10b)$$

und die Beweglichkeit wird feldstärkeabhängig. Für die Driftgeschwindigkeit erhält man

$$v_d = (\frac{1}{2} \alpha E \lambda)^{1/2}; \quad \alpha = e_0/m_i. \quad (11)$$

Die hier angegebene Formel für die Driftgeschwindigkeit setzt voraus, daß die Ionen nach jedem Stoß im Feld der Schicht mit der Geschwindigkeit Null starten. Dieses ist keineswegs allgemein gültig. Für die folgenden Betrachtungen ist jedoch ausschließlich die Proportionalität der Driftgeschwindigkeit zur Wurzel aus der elektrischen Feldstärke von Bedeutung — ein Zusammenhang, den auch exaktere Theorien für den Grenzfall 2 liefern.

Zum leichteren Unterscheiden der Grenzfälle 1 und 2 führt man zweckmäßigerweise eine Äquivalentfeldstärke für die thermische Energie der Ionen als Grenzfeldstärke  $E_g$  ein:

$$E_g = \frac{4 k T_i}{\pi e_0 \lambda} = \frac{4 V_i}{\pi \lambda} \quad \text{mit} \quad W_{\text{kin}} = \frac{4}{\pi} k T_i. \quad (12)$$

Beispielsweise erhält man für Stickstoff mit  $T_i = T_{\text{Gas}} = 10^3 \text{ }^\circ\text{K}$  eine druckbezogene Grenzfeldstärke von  $E_g/p = 15 \text{ V cm}^{-1} \text{ Torr}^{-1}$ .

Die elektrische Feldstärke im Plasma nimmt vom Volumen zum Gefäßrand hin monoton zu. In der Schicht vor der Wand steigt die Feldstärke weiter an und kann dort erhebliche Werte annehmen<sup>9</sup>. Für die Beweglichkeit der Ionen in einer stoßbestimmten Raumladungsschicht wird daher der Fall 2 zutreffen. In den folgenden Betrachtungen wird deshalb die Gültigkeit der Gl. (11) vorausgesetzt.

### Die Schichtbedingung

Wie BOYD<sup>10</sup> zeigte, ist die Ausbildung einer positiven Raumladungsschicht speziell bei einer ebenen Sonde nicht möglich, wenn für die Ionen an der Schichtgrenze eine Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung vorausgesetzt wird. Zwischen Schicht und ungestörtem Plasma muß i. allg. noch ein Übergangsgebiet angenommen werden, in dem die Ionen infolge unvollständiger Abschirmung des Wandpotentials durch das Schichtfeld bereits beschleunigt werden, ohne daß die Quasineutralität in diesem Gebiet gestört wird. Zu ähnlichen Schlußfolgerungen gelangen auch SCHULZ und BROWN<sup>11</sup>. Eine Zusammenfassung zu dieser Problematik findet man bei SCHOTT<sup>12</sup>.

Die Mindestfeldstärke, die im Falle einer stoßbestimmten Ionenbewegung zur Ausbildung einer positiven Raumladung erforderlich ist, beträgt bei BOYD

$$E_0 = V_e/\lambda, \quad (13)$$

$\lambda$  = mittlere freie Weglänge der Ionen.

Diese Bedingung liefert jedoch z. B. bei den hohen Elektronentemperaturen, wie sie in einer Stickstoffentladung herrschen ( $V_e \approx 10 \text{ V}$ ), viel zu hohe  $E_0/p$ -Werte von der Größenordnung  $10^3 \text{ V cm}^{-1} \text{ Torr}^{-1}$ .

Der Grund für das Versagen des Boydschen Schichtkriteriums dürfte darin zu suchen sein, daß diese Bedingung für freifallende Ionen abgeleitet, dann aber auf Diffusionsvorgänge angewandt wurde.

Bessere Ergebnisse liefert eine Bedingung von SCHULZ<sup>9</sup>, die für eine diffusionsbestimmte Raumladungsschicht in einem isothermen Plasma ( $V_e = V_i$ ) gilt:

$$E_0 = V_e/\beta \lambda_D \quad (14)$$

$\beta = 2,323$  Schulz'sche Plasmakonstante

$$\text{und} \quad \lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 V_e}{e_0 n} \right)^{1/2} \quad (15)$$

Debyes Abschirmungsradius.

Bei SCHULZ sorgt die ambipolare Diffusion für die zur Schichtausbildung notwendige elektrische Mindestfeldstärke.

Exakte Rechnungen für den nichtisothermen Fall stehen noch aus. Eine von HESSE<sup>8</sup> durchgeführte Abschätzung ergibt für die Mindestfeldstärke die Beziehung

$$E_0 < V_e/\sqrt{2} \lambda_D \quad (16)$$

Unter Verallgemeinerung dieser Beziehung wird im weiteren die Schichtbedingung durch eine Mindestfeldstärke von der Form \*

<sup>9</sup> G. SCHULZ, Z. Physik **183**, 51 [1965].

<sup>10</sup> R. L. F. BOYD, Proc. Roy. Soc. London **A 201**, 329 [1950]; Nature London **165**, 228 [1950].

<sup>11</sup> G. J. SCHULZ u. S. C. BROWN, Phys. Rev. **98**, 1642 [1955].

<sup>12</sup> L. SCHOTT, "Electrical Probes" in "Plasma Diagnostics", W. LOCHTE-HOLTGREVEN, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1968.

\* Die anschauliche Interpretation von Gl. (17) ist, daß die Ionenenergie den Betrag  $e_0 E_0 \lambda_D \approx e_0 V_e$  überschreiten muß, um die gegenseitige Kopplung und Abschirmung der Ladungsträger aufbrechen zu können, was zur Ausbildung einer positiven Raumladungsschicht notwendig ist.

$$E_0 = \frac{1}{c} \cdot \frac{V_e}{\lambda_D} \quad (17)$$

mit  $\sqrt{2} < c \leq 2.32$  zugrunde gelegt.

Im Gegensatz zur Boydschen Schichtbedingung enthält die hier benutzte außer der Elektronentemperatur  $T_e$  auch die Trägerkonzentration  $n$ , was physikalisch sinnvoll erscheint.

In Entladungsplasmen kommt oft der Fall vor, daß  $E_0 > E_g$  [siehe Gl. (12)] ist. In diesem Falle wird ein quasineutrales Übergangsgebiet zwischen Plasma und Raumladungsschicht angenommen. Im Übergangsgebiet gilt also für die elektrische Feldstärke  $E$

$$E_g \leq E \leq E_0.$$

Um das quasineutrale Gebiet erhöhter Feldstärke vor der Raumladungsschicht gegen das ungestörte Plasma abgrenzen zu können, wird als ungestörtes Plasma das Gebiet definiert, in dem die von der Begrenzung durch die Wand herrührende Feldstärke  $E$  die thermische Äquivalentfeldstärke  $E_g$  nicht überschreitet, d. h.

$$E \leq E_g.$$

Als Definition der Plasmagrenze wird  $E_{\text{Plasma}} = E_g$  gesetzt. Diese Definition stellt sicher, daß im Plasma selbst keine Änderung der Ionenzusammensetzung infolge erhöhter kinetischer Energie der Ionen zu befürchten ist.

Abb. 1 veranschaulicht die obigen Betrachtungen.

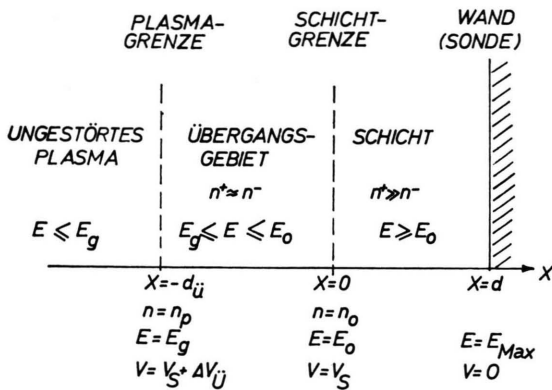


Abb. 1. Modellvorstellung für den Aufbau der Schicht.

### Näherungsweise Berechnung der Feldstärke in der Schicht

Die Feldstärke in der Schicht einer ebenen Sonde (s. Abb. 1)

$$E = -dV/dx \quad (18)$$

läßt sich aus der Poisson-Gleichung

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{e_0}{\epsilon_0} (n^+ - n^-) \quad (19)$$

und der Kontinuitätsgleichung

$$I^+(0) = I^+(x) = I^+(d) \quad (20)$$

ermitteln.

Mit Gl. (11) beträgt die Ionenstromdichte an beliebiger Stelle  $x$  in der Schicht durch eine Fläche senkrecht zur Feldrichtung

$$I^+(x) = e_0 n^+(x) \sqrt{\frac{1}{2} \alpha E(x) \lambda}. \quad (21)$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß an der Stelle  $x=0$   $E=E_0$  ist, folgt aus (20) und (21)

$$n^+(x) = n_0 \sqrt{E_0/E(x)}. \quad (22)$$

Die Lösung wird besonders einfach, wenn man sich nur für den Höchstwert der Feldstärke bzw. ihren Verlauf in Wandnähe bei negativen Sondenspannungen (Ionensaugspannungen) interessiert. In Wandnähe ist nämlich die negative Raumladung selbst bei statischem Potential schon sehr klein, so daß sie näherungsweise vernachlässigt werden kann.

Die folgende Berechnung erstreckt sich also nur auf den sondennahen Bereich, in dem gilt  $n^- \ll n^+$ .

Da  $E$  und  $V$  in der Schicht monoton zunehmen, verringert die negative Raumladung in den Schichtbereichen, in denen  $n^-$  nicht vernachlässigbar ist, lediglich die Krümmung des Verlaufs von  $E(x)$  und  $V(x)$ ;  $E$  und  $V$  nehmen langsamer zu, die Schicht erstreckt sich weiter ins Plasma als berechnet.

Mit dieser Näherung wird die Poisson-Gleichung

$$\frac{dE}{dx} = \frac{e_0}{\epsilon_0} n_0 \sqrt{\frac{E_0}{E}}. \quad (23)$$

Durch Integration folgt der Feldverlauf in der Schicht in Wandnähe:

$$E(x) = \left( \frac{3 e_0 n_0}{2 \epsilon_0} E^{1/2} x + E_0^{3/2} \right)^{2/3}. \quad (24)$$

Nach nochmaliger Integration erhält man den Potentialverlauf  $V(x)$  bezogen auf das Potential der Sonde  $V(x=d)=0$ .  $V(x=0)=V_s$  ist dabei das Potential der Schichtgrenze, d. h. das zu  $E=E_0$  gehörende Potential.

$$-(V(x) - V_s) = \frac{2}{5} \frac{\epsilon_0}{e_0 n_0 E_0^{1/2}} (E^{5/2} - E_0^{5/2}). \quad (25)$$

Die maximale Feldstärke in der Schicht tritt vor der Sonde auf ( $x=d$ ,  $V(x=d)=0$ ):

$$E_{\text{Max}} = E_0 \left( 1 + \frac{5}{2} \frac{e_0 n_0}{\epsilon_0 E_0^{3/2}} V_s \right)^{2/5}. \quad (26)$$



Unter Benutzung der Schichtbedingung Gl. (17) vereinfacht sich die Beziehung zu

$$E_{\text{Max}} = E_0 \left(1 + \frac{5}{2} c^2 V_s / V_e\right)^{2/5}. \quad (27)$$

Die maximale Feldstärke in der Schicht ist also der Anfangsfeldstärke, die sich aus der Schichtbedingung ergibt, proportional.

Die Beziehungen (24) und (27) lassen nunmehr Aussagen über Verlauf und Maximalwert der elektrischen Feldstärke in der Schicht zu.

Will man den Maximalwert der Feldstärke für den Fall der statischen Schicht berechnen, so sind die beiden Fälle  $E_0 > E_g$  und  $E_0 < E_g$  unterschiedlich zu behandeln. Gilt  $E_0 > E_g$ , so bildet sich vor der Schichtgrenze ein quasineutrales Übergangsgebiet aus. In Gl. (27) darf dann nicht einfach der mit Gl. (7) berechnete Wert für  $V_{\text{st}}$  eingesetzt werden. Gleichung (7) gibt die Potentialdifferenz zwischen ungestörtem Plasma, also der Plasmagrenze und Sonde wieder. In Gl. (27) ist aber die Potentialdifferenz zwischen Schichtgrenze und Sonde einzusetzen. Diese Spannung ist um den Betrag  $\Delta V_{\text{ü}}$  kleiner als  $V_{\text{st}}$ . Mit Hilfe von Gl. (33) und Gl. (36) findet man

$$\Delta V_{\text{ü}} = \frac{1}{2} V_e \ln \left( \frac{\pi}{4c} \frac{\lambda}{\lambda_D} \frac{V_e}{V_i} \right) \text{ mit } \lambda_D \text{ für } n = n_0 \quad (33 \text{ a})$$

oder

$$\Delta V_{\text{ü}} = \frac{2}{3} V_e \ln \left( \frac{\pi}{4c} \frac{\lambda}{\lambda_{\text{Dp}}} \frac{V_e}{V_i} \right) \text{ mit } \lambda_D = \lambda_{\text{Dp}} \text{ für } n = n_p.$$

Es erscheint sinnvoll, auch in den folgenden Ergebnissen die Debye-Länge an der Schichtgrenze  $\lambda_D$  mittels der Beziehung  $\lambda_{\text{Dp}} = \sqrt{n_0/n_p} \cdot \lambda_D$  durch die an der Plasmagrenze  $\lambda_{\text{Dp}}$  auszudrücken.

Für die statische Schicht im Falle  $E_0 > E_g$  folgt

$$E_{\text{Max, st}} = E_0 \left(1 + \frac{5}{2} c^2 \frac{V_{\text{st}} - \Delta V_{\text{ü}}}{V_e}\right)^{2/5}. \quad (27 \text{ a})$$

### Abschätzung der Schichtdicke für den Bereich überwiegender positiver Ladungsträger

Gleichung (24) läßt sich schreiben

$$d = x = (E^{3/2} - E_0^{3/2}) \gamma^{-1} \quad (28)$$

mit

$$\gamma = \frac{3}{2} \cdot \frac{e_0 n_0 E_0^{1/2}}{\epsilon_0} = \frac{3}{2} \cdot \frac{n_0}{n_p} \cdot \frac{e_0 n_p E_0^{1/2}}{\epsilon_0}.$$

Mit der näherungsweisen Voraussetzung  $E \gg E_0$  folgt

$$d \approx \gamma^{-1} E^{3/2}.$$

Dann gilt erst recht  $E^{5/2} \gg E_0^{5/2}$ . Damit folgt aus (27)

$$E \approx E_0 \left( \frac{5}{2} c^2 \frac{V_s}{V_e} \right)^{2/5} \quad (29)$$

und weiter

$$d \approx \left( \frac{5}{2} \frac{V_s}{V_e} \right)^{2/5} \frac{2}{3} c^{1/5} \lambda_{\text{Dp}} \sqrt{\frac{n_p}{n_0}}. \quad (30)$$

In Gl. (30) ist die Debye-Länge  $\lambda_{\text{Dp}}$  für  $n = n_p$  formal eingeführt worden, damit die Schichtdicke mit den Parametern des ungestörten Plasmas berechenbar wird. Dies bedingt das Auftreten von  $\sqrt{n_p/n_0}$  in Gl. (30).

Auch in Formel (30) muß an Stelle von  $V_s$  für die statische Schicht  $V_{\text{st}} - \Delta V_{\text{ü}}$  gesetzt werden.

In der Schichtdicke nach Gl. (30) ist nicht der Teil der Schicht enthalten, in dem die Elektronenkonzentration der Ionenkonzentration vergleichbar ist. Insbesondere fehlen noch Betrachtungen zum quasineutralen Übergangsgebiet, die im folgenden Kapitel angestellt werden.

### Abschätzung der Schichtdicke für das Übergangsgebiet

Hier gilt  $n^+ \approx n^-$  und folglich (siehe BOYD<sup>10</sup>)

$$n = n_p \exp \{ \Delta V_{\text{ü}} / V_e \}, \quad (32)$$

$\Delta V_{\text{ü}}$  = Potentialdifferenz zwischen Plasmagrenze und Schichtgrenze.

Es folgt

$$\Delta V_{\text{ü}} = V_e \ln(n_p/n), \quad (33)$$

$$- \frac{dV}{(-dx)} = E = -V_e \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dx}. \quad (34)$$

Außerdem gilt die Kontinuitätsgleichung

$$I^+ = e_0 n \left( \frac{1}{2} \alpha E \lambda \right)^{1/2} = I_p^+ \quad (35)$$

und folglich ist

$$n^2 E = n_0^2 E_0 = n_p^2 E_p, \quad (36)$$

$n_0$  = Trägerkonzentration an der Schichtgrenze (siehe Abb. 1).

Aus (34) und (36) folgt

$$-n \frac{dn}{dx} = \text{const} = n_0^2 E_0 V_e^{-1}. \quad (37)$$

Nach Integration findet man mit den Forderungen für  $x = -d_{\text{ü}}$  soll sein  $n = n_p$  und für  $x = 0$   $n = n_0$

$$n_p^2 - n_0^2 = 2 n_0^2 E_0 V_e^{-1} \cdot d_{\text{ü}}.$$

Mit (36) folgt dann

$$d_{\text{ü}} = \frac{c}{2} \left( \frac{E_0}{E_p} - 1 \right) \lambda_{\text{Dp}} \sqrt{\frac{n_p}{n_0}}, \quad (38)$$

wobei definitionsgemäß für die Feldstärke an der Plasmagrenze  $E_p$  die Äquivalentfeldstärke der thermischen Ionenenergie [Gl. (12)]  $E_g$  gesetzt werden muß.

Folglich ist auch die Schichtdicke des Übergangsgebietes der Debye-Länge  $\lambda_{Dp}$  proportional. Diese stellt also ein geeignetes Maß für die gesamte „Eindringtiefe“  $d_{ges} = d + d_{ii}$  der Wandstörung in das Plasma dar.

### Schichtparameter von Stickstoffplasmen

Für das Beispiel von Entladungs- und Nachleuchtplasmen im reinen Stickstoff wurden mit Hilfe der Beziehungen (7), (12), (15), (17), (27 a), (30), (33 a), (38) die Schichtparameter wie  $V_{st}$ ,  $E_g$ ,  $\lambda_D$ ,  $E_0$ ,  $E_{Max, st}$ ,  $d_{st}$ ,  $\Delta V_{ii}$ ,  $d_{ii}$  berechnet. Die Ergebnisse sind im zweiten Teil der Tab. 1 zusammengefaßt.

Im ersten Teil der Tab. 1 sind Druck, mittlere freie Weglänge der Ionen, Spannungsäquivalente der Elektronen- und Ionentemperaturen und Ionenkonzentrationen, die typisch für die erwähnten Plasmen sind, angegeben.

Die Zahlenwerte für die mittleren freien Weglängen sind Näherungswerte, die ihrer Größenordnung nach für alle in Stickstoff bekannten Ionenarten zu treffen.

Die errechneten Ergebnisse sind als größenordnungsmäßige Angaben zu werten, was neben den Zahlenwerten für die freien Weglängen auch noch auf die Unsicherheit der Konstanten  $c$  in Gl. (17) zurückzuführen ist. Die Rechnungen wurden mit  $c = \sqrt{2}$  durchgeführt.

### Zusammenfassung

Die durchgeführten Betrachtungen hatten zum Ziel, Aussagen über die elektrische Feldstärke in der Raumladungsschicht und über deren räumliche Ausdehnung zu gewinnen. Beide Schichtgrößen sind in dem Falle, in welchem die Ionen in der Raumladungsschicht viele Stöße erleiden, von Bedeutung für die Extraktion von Ionen. Mit ihrer Kenntnis kann abgeschätzt werden, ob in der Schicht Ion-Molekül-Reaktionen stattfinden können bzw. ob die Richtungsverteilung der extrahierten Ionen verän-

	Entladungsplasma		Nachleuchtplasma			
Druck $p$ in Torr	1	7,5	7,5	7,5	7,5	1
freie Weglänge der Ionen $\lambda$ in cm	$7 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-3}$
Äquivalent der Elektronentemp. $V_e$ in V	15	7,5	0,67	0,67	0,67	$0,67^{13}$
Äquivalent der Ionentemp. $V_i$ in V	$10^{-1}$ entsprechend ca. $1200^\circ\text{K}$					
Ionenmasse $m_i$ (für $\text{N}_2^+$ ) in Vielfachen der Elektronenmasse	ca. $5 \cdot 10^4$					
Ionenkonzentration $n_p$ in $\text{cm}^{-3}$	$5 \cdot 10^8$	$1,2 \cdot 10^{10}$	$1,2 \cdot 10^{10}$	$5 \cdot 10^9$	$10^9$	$10^8$
Debye-Länge $\lambda_{Dp}$ in cm	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$
statisches Potential in Vielfachen von $V_e$	7,9	7,5	6,4	6,4	6,4	6,4
Plasma-Grenzfeldstärke $E_g$ in $\text{Vcm}^{-1}$	18	127	127	127	127	18
Mindestfeldstärke $E_0$ in $\text{Vcm}^{-1}$	50	256	96	48	24	8
$\Delta V_{ii}$ in Vielfachen von $V_e$	0,8	0,3	—	—	—	—
$E_{Max, st}$ in Vielfachen von $E_0$	4,2	4,2	4	4	4	4
Dicke der statischen Schicht $d_{st}$ in $\lambda_{Dp}$	5,5	4,4	3,7	3,7	3,7	3,7
Dicke des Übergangsgebiets $d_{ii}$ in $\lambda_{Dp}$	1,9	1,1	—	—	—	—

Tab. 1.

<sup>13</sup> H. P. BROIDA u. G. E. BEALE, J. Chem. Phys. **31**, 1030 [1959]. — Anmerkung: Für das Nachleuchtplasma ist die Bedingung  $E_0 > E_g$  nicht erfüllt, d. h. das quasineutrale Übergangsgebiet vor der Schichtgrenze ist nicht ausgebildet. In Tab. 1 sind die entsprechenden Größen somit nicht berechnet und mit „—“ gekennzeichnet.

dert wird. Diese Prozesse können zu systematischen Fehlern bei der Plasmadiagnostik mit Massenspektrometern führen.

Ausgangspunkt der Überlegungen waren sondentheoretische Betrachtungen. Vereinfachend wurde nur eine aus positiven Ladungsträgern bestehende Schicht behandelt. Zu den Annahmen gehört, daß die stoßbestimmte Bewegung der Ionen in der Schicht derart erfolgt, daß ihre Driftgeschwindigkeit proportional der Wurzel aus dem Betrag der elektrischen Feldstärke ist. Ebenso wurde das *Boyd*sche Schichtkriterium in die Überlegungen mit einbezogen.

Für die zur Ausbildung einer positiven Raumladung notwendige Mindestfeldstärke wurde ein Ausdruck verwendet, in dem neben der Elektronentemperatur auch noch die Trägerkonzentration auftritt.

Die Ergebnisse der Rechnung zeigen, daß die maximale elektrische Feldstärke, die direkt an der Wand, also an der Extraktionsöffnung auftritt, der Mindestfeldstärke proportional ist. Die Dicke der Schicht kann in Vielfachen der Debye-Länge ausgedrückt werden. Ebenso die Dicke des quasineutralen Übergangsgebiets vor der Raumladungsschicht. Konkrete Berechnungen der Schichtparameter sind für Stickstoffplasmen durchgeführt worden. Die Ergebnisse sind in einer Tabelle zusammengefaßt.

Herrn Privatdozenten Dr. H. H. BRÖMER gilt unser Dank für stete Förderung, zahlreiche Anregungen und wertvolle Diskussionen. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft in Bad Godesberg danken wir für die finanzielle Unterstützung.

<sup>14</sup> M. PAHL, Z. Naturforsch. **12 a**, 632 [1957].

<sup>15</sup> K. FETTE, Dissertation, Techn. Universität Braunschweig 1968.

## Anhang

### *Bemerkungen zum Zusammenhang der Wandströme mit den Ionenkonzentrationen im Plasma*

In der Massenspektrometrie zur Plasmadiagnostik ist der Zusammenhang der Ionen-Wandströme mit den Ionenkonzentrationen im Plasma von größter Wichtigkeit. Es zeigt sich, daß auch bei stoßbestimmter Ionenbewegung in der Schicht die Proportionalität der Ionenstromdichten  $I_j^+$  auf die Wand zu den Konzentrationen  $n_{pj}$  der einzelnen Ionensorten  $j$  im Plasma bei einer ebenen Sonde erhalten bleibt, obwohl zunächst durch Einführung der Schichtbedingung [Gl. (17)] in die Gl. (21) eine zusätzliche Abhängigkeit von der Gesamtträgerkonzentration  $n_0$  zu bestehen scheint

$$I_j^+ = e_0 n_{0j} \left( \frac{e_0}{2 m_j} E_0(n_0) \lambda \right)^{1/2}. \quad (39)$$

Es kann jedoch auch auf das Übergangsgebiet die Kontinuitätsgleichung angewandt werden, d. h.  $I_{0j} = I_{pj}^+$ .

Die Stromdichten an der Schichtgrenze  $I_{0j}$  müssen gleich denen an der Plasmagrenze  $I_{pj}^+$  sein, da die durchsetzten Flächen vor einer idealen ebenen Sonde stets gleich sind. Ionenumwandlungen sowie Rekombinationsprozesse in der Schicht müssen natürlich ausgeschlossen bleiben.

Für die Verhältnisse an der Plasmagrenze jedoch läßt sich, bei Berücksichtigung der Gl. (12) für die Feldstärke, die geforderte Proportionalität leicht erkennen. Es folgt

$$I_j^+ = e_0 n_{pj} \left( \frac{2 k T_i}{\pi m_j} \right)^{1/2}. \quad (40)$$

Bei Kenntnis der Dichteverteilung im Plasma, z. B. bei Vorliegen einer Diffusionsverteilung<sup>14</sup>, lassen sich daraus die Ionenkonzentrationen im ganzen Plasma angeben, falls die Ionenkonzentrationen in Wandnähe überhaupt für das ganze Plasma als repräsentativ angesehen werden dürfen<sup>15</sup> und falls Prozesse in der Schicht nicht zur Verfälschung der Ionenströme führen<sup>1, 3, 15, 16</sup>.

<sup>16</sup> H. H. BRÖMER u. K. FETTE, Phys. Letters **28 A**, 127 [1968].